

**Partie A**

1. Avec des notations naturelles :

$$(\mathcal{P}) \text{ se traduit par le système } \begin{cases} 2b = a + c \\ c = b \end{cases} \iff c = b = a$$

2. (a) Cette fois :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) &\iff \begin{cases} 2b = a + c \\ 2c = b + d \\ 2d = c + e \end{cases} \iff \begin{cases} 2b = a + c \\ 4c = (a + c) + (c + e) \\ 2d = c + e \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4b = 2a + a + e \\ 2c = a + e \\ 4d = a + e + 2e \end{cases} \iff \begin{cases} b = (3a + e)/4 \\ c = (a + e)/2 \\ d = (a + 3e)/4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } (\mathcal{P}) &\iff \begin{cases} 2b = a + c \\ 3c = b + d + e \\ 3d = a + c + e \end{cases} \iff \begin{cases} 2b = a + c \\ 18c = 3(a + c) + 2(a + c + e) + 6e \\ 3d = a + c + e \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 26b = 13a + (5a + 8e) \\ 13c = 5a + 8e \\ 39d = 13a + (5a + 8e) + 13e \end{cases} \iff \begin{cases} b = (18a + 8)/26 \\ c = (5a + 8e)/13 \\ d = (18a + 21e)/39 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c) } (\mathcal{P}) &\iff \begin{cases} 4b = a + c + d + e \\ 4c = a + b + d + e \\ 4d = a + b + c + e \end{cases} \iff \begin{cases} 5b = a + b + c + d + e \\ 5c = a + b + c + d + e \\ 5d = a + b + c + d + e \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = c = d = s/5 \\ 5a + 5b + 5c + 5d + 5e = 3s + 5a + 5e \end{cases} \iff b = c = d = (a + e)/2 \end{aligned}$$

3. Je note  $E_n$  la liste des entiers de 1 à  $n$  et, pour tout  $i$  de  $E_n$ ,  $x_i$  le nombre attribué à  $P_i$

$$(\mathcal{P}) \iff \forall i \in E_n, (n+1)x_i = a + \sum_{k \neq i} x_k + b \iff \begin{cases} s = \sum_{k \in E_n} x_k \\ \forall i \in E_n, (n+2)x_i = a + b + s \end{cases}$$

$$\text{Par addition } (\mathcal{P}) \iff \begin{cases} s = \sum_{k \in E_n} x_k \\ \forall i \in E_n, (n+2)x_i = a + b + s \\ (n+2)s = n(a + b + s) \end{cases} \iff \begin{cases} s = \sum_{k \in E_n} x_k = n(a + b)/2 \\ \forall i \in E_n, (n+2)x_i = \frac{2(a + b) + n(a + b)}{2} \end{cases}$$

$$\text{Finalement } (\mathcal{P}) \iff \forall i \in E_n, x_i = \frac{a + b}{2}$$

**Partie B****Existence d'une solution**

1. (a) Je procède par récurrence en notant  $V(M)$  l'ensemble des voisins de  $M$

- Hérité

Si pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $0 \leq f_n(M) \leq f_{n+1}(M) \leq K$  pour tout  $M \in \mathcal{S}$

alors pour  $M \in \mathcal{J}$ ,  $0 \leq f_n(M) = f_{n+1}(M) \leq k$  et pour  $M \in \mathcal{B}$  :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{d(M)} \sum_{P \in V(M)} f_n(P) \leq \frac{1}{d(M)} \sum_{P \in V(M)} f_{n+1}(P) \leq \frac{1}{d(M)} \sum_{P \in V(M)} K \\ 0 &\leq f_{n+1}(M) \leq f_{n+2}(M) \leq \frac{1}{d(M)} d(M) K \end{aligned}$$

- Initialisation

si  $M$  est jaune,  $0 \leq f_0(M) = f_1(M) \leq K$ ,

$$\text{sinon } 0 = f_0(M) \leq \frac{1}{d(M)} \sum_{P \in V(M)} f_0(P) \leq d(M) \sum_{P \in V(M)} K = K$$

(b)  $\forall M \in \mathcal{J}$ ,  $(f_n(M))$  est croissante et majorée donc converge. Soit  $f(M) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(M)$ .

- si  $M$  est jaune,  $f(M) = k(M)$  car  $(f_n(M))$  est constante
- si  $M$  est bleu,

$$f(M) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{n+1}(M) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d(M)} \sum_{P \in V(M)} f_n(P) = \frac{1}{d(M)} \sum_{P \in V(M)} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(P) = \frac{1}{d(M)} \sum_{P \in V(M)} f(P)$$

$f$  est une solution pour l'attribution  $k$ .

2.  $f$  est une solution pour l'attribution de  $k$  et  $\alpha$  est une constante.

$$\begin{cases} f(M) = k(M) \text{ si } M \text{ est jaune,} \\ f(M) = \frac{1}{d(M)} \sum_{P \in V(M)} f(P) \text{ si } M \text{ est bleu} \end{cases} \text{ donne } \begin{cases} f(M) + \alpha = k(M) + \alpha \text{ si } M \text{ est jaune,} \\ f(M) + \alpha = \frac{1}{d(M)} \sum_{P \in V(M)} (f(P) + \alpha) \text{ si } M \text{ est bleu} \end{cases}$$

3. Je note  $K_0$  le plus petit des nombres  $k(M)$  lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{J}$

On obtient la solution en appliquant 1. à l'attribution  $k - K_0$  puis 2. avec  $\alpha = K_0$

Remarque. On pouvait aussi traiter directement la question 1 sans la condition «  $k(M) \geq 0$  pour tout  $M \in \mathcal{J}$  » en choisissant  $f_0(M) = K_0$  pour tout  $M \in \mathcal{B}$  et en démontrant que pour tout  $M$ ,  $K_0 \leq f_n(M) \leq f_{n+1}(M) \leq K$

### Unicité de la solution

4. Soit  $M_0$  un point où  $f$  atteint son maximum sur  $\mathcal{B}$ .

$$\begin{aligned} f(M_0) = \frac{1}{d(M_0)} \sum_{P \in V(M_0)} f(P) &\Rightarrow \sum_{P \in V(M_0)} ((f(M_0) - f(P))) = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{P \in V(M_0) \cap \mathcal{J}} ((f(P) - f(M_0))) = \sum_{P \in V(M_0) \cap \mathcal{B}} ((f(M_0) - f(P))) \end{aligned}$$

Or  $\sum_{P \in V(M_0) \cap \mathcal{B}} (f(M_0) - f(P)) \geq 0$  donc

- si  $V(M_0) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ , au moins un des  $f(P) - f(M_0)$  avec  $P \in V(M_0) \cap \mathcal{J}$  est positif ou nul et  $f(M_0) \leq K$
- si  $V(M_0) \cap \mathcal{B} = \emptyset$ , tous les  $f(M_0) - f(P)$  avec  $P \in V(M_0) \cap \mathcal{B}$  sont nuls car tous supérieurs ou égaux à 0 et de somme nulle.

On peut alors suivre un chemin où les  $f(M)$  sont tous égaux à  $f(M_0)$  jusqu'à atteindre un point de  $\mathcal{B}$  pour lequel  $V(M_0) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$

5. (a) Pour tout  $M \in \mathcal{B}$

$$f(M) = \frac{1}{d(M)} \sum_{P \in V(M)} f(P) \text{ et } g(M) = \frac{1}{d(M)} \sum_{P \in V(M)} g(P)$$

$$\text{donc } f(M) - g(M) = \frac{1}{d(M)} \sum_{P \in V(M)} (f(P) - g(P))$$

(b) Pour tout  $M \in \mathcal{J}$ ,  $f(M) = k(M)$  et  $g(M) = k(M)$  donc  $f(M) - g(M) = 0$

(c)  $f - g$  mais aussi  $g - f$  sont des attributions de 0 donc  $f - g \leq 0$  et  $g - f \leq 0$  et finalement  $f = g$

6. S'il y a un seul point jaune  $J$ ,

- $f(J) = K$  et pour tout  $M \in \mathcal{J}$ ,  $f(M) \leq K$ ,
- $-f$  est l'attribution de  $-k$  donc pour tout  $M \in \mathcal{J}$ ,  $-f(M) \leq -K$
- $f$  est donc constante.